M10 Wachstumsvorgänge | 1

Lineares Wachstum:

Ist die Differenz von je zwei aufeinanderfolgenden Werten eines Bestands f konstant, d.h.

$f(t+1) - f(t) = d$, so liegt ein **lineares Wachstum** vor.

Dann gilt: $f(t) = f(0) + d \cdot t$

Exponentielles Wachstum:

Ist der Quotient von je zwei aufeinanderfolgenden Werten eines Bestands g konstant, d.h.

$a = \frac{g(t+1)}{g(t)} \neq 1$, so liegt ein **exponentielles Wachstum** vor.

Dann gilt: $g(t) = g(0) \cdot a^t$, a bezeichnet man dabei als **Wachstumsfaktor**.

Für $a < 1$ nehmen die Werte ab, man spricht auch von einem negativen Wachstum.

M10 Wachstumsvorgänge | 1

Aufgabe:

Entscheiden Sie, um welche Art von Wachstum es sich handelt und geben Sie jeweils eine Funktion an, mit der sich der Wachstumsvorgang mathematisch beschreiben lässt!

a) Beim Befüllen eines Aquariums nimmt die Wasserhöhe um $3cm$ pro Minute zu.
b) Ein neues Handy kostet 800€. Jedes Jahr verliert es die Hälfte seines Wertes.
c) Eine Hefekultur mit $5g$ Hefe verdreifacht stündlich ihre Menge.
d) Eine $15cm$ hohe Kerze wird angezündet. Jede Minute brennt sie um 2mm herunter.

Lösung:

a) Lineare Zunahme: $f(t) = 3 \cdot t$ (t: vergangene Zeit in Minuten, $f(t)$: Wasserhöhe in cm)
b) Exponentielle Abnahme: $f(t) = 800 \cdot 0{,}5^t$ (t: vergangene Zeit in Jahren, $f(t)$: Wert in €)
c) Exponentielle Zunahme: $f(t) = 5 \cdot 3^t$ (t: vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$: Hefemenge in g)
d) Lineare Abnahme: $f(t) = 15 - 0{,}2 \cdot t$ (t: vergangene Zeit in Minuten, $f(t)$: Höhe der Kerze in cm

M10 Exponentialfunktionen | 2

Eine Funktion der Form $f(x) = b \cdot a^x$ mit $x \in IR$ heißt **Exponentialfunktion**.

a ist eine Konstante und heißt **Wachstumsfaktor**. Es gilt: $a \in IR^+ \setminus \{1\}$

b ist ebenfalls eine Konstante und gibt den **Anfangswert** der Funktion an, es gilt: $f(0) = b$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) Monotonie: $a > 1$ und $b > 0$: G_f ist monoton steigend
   $0 < a < 1$ und $b > 0$: G_f ist monoton fallend
2) Wertemenge: $b > 0$: $W_f = IR^*$
   $b < 0$: $W_f = IR^-$
3) Nullstellen: G_f schneidet nie die $x-$Achse, besitzt also keine Nullstellen
4) Asymptote: die $x-$Achse ist waagrechte Asymptote

M10 Exponentialfunktionen | 2

Aufgabe

Entscheiden Sie, ob für die Funktion f mit $f(x) = b \cdot 2^x$ ($b \in IR$) die folgenden Aussagen wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

a) Wenn $b < 0$ ist, dann verläuft G_f im III. und IV. Quadranten.
b) Spiegelt man den Graphen der Funktion f an der $x-$Achse, so erhält man den Graphen der Funktion $h(x) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
c) Es gilt: $f(x+2) = 4 \cdot f(x)$
d) Der Graph G_f ist monoton steigend.

Lösung:

a) Wahr, da $f(x) < 0$ für $b < 0$
b) Falsch, man erhält den Graphen der Funktion $h(x) = -b \cdot 2^x$
c) Wahr, da $f(x+2) = b \cdot 2^{x+2} = b \cdot 2^x \cdot 2^2 = f(x) \cdot 4 = 4 \cdot f(x)$
d) Nicht entscheidbar, G_f ist monoton steigend für $b > 0$ und monoton fallend für $b < 0$

M10 Exponentialgleichungen und Logarithmen | 3

Die **Exponentialgleichung $a^x = b$** (mit $a, b \in IR^+, a \neq 1, x \in IR$) hat genau eine Lösung, die man als **Logarithmus von b zur Basis a** bezeichnet. Man schreibt: $x = \log_a b$

Umgekehrt gilt:
Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um die Zahl b zu erhalten.

Logarithmusgesetze:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$$

$$\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}$$

Wichtige Gleichungen: $a^{\log_a x} = x$ $\qquad \log_a a = 1$

$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$ $\qquad$ (Speziell: $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$)

Besonderer Logarithmus: Statt $\log_{10} x$ schreibt man auch $\lg x$ (Zehnerlogarithmus).

M10 Exponentialgleichungen und Logarithmen | 3

Aufgabe: Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $2 \cdot 7^x - 6 = 14$

b) $3^{2x-1} = 25$

c) $4^{-x} \cdot 3^x = 7$

Lösung:

a) $2 \cdot 7^x - 6 = 14 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 7^x = 20 \;\Rightarrow\; 7^x = 10 \;\Rightarrow\; x = \log_7 10 \approx 1{,}2$

b) $3^{2x-1} = 25 \;\Rightarrow\; 2x - 1 = \log_3 25 \;\Rightarrow\; 2x = \log_3 25 + 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{(\log_3 25)+1}{2} \approx 2{,}0$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 3^x = 7 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right)^x = 7 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{4}\right)^x = 7 \;\Rightarrow\; x = \log_{\frac{3}{4}} 7 \approx -6{,}8$

M10 Pfadregeln | 4

1. **Pfadregel:**
   Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

2. **Pfadregel:**
   Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses**, indem man die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse addiert, die zu den Pfaden dieses Ereignisses gehören.

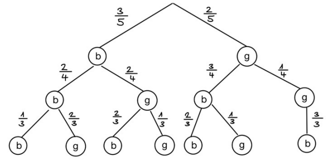
M10 Pfadregeln | 4

Aufgabe:
Aus einer Urne mit drei blauen und zwei gelben Kugeln wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Ermitteln Sie mithilfe der Pfadregeln und eines ausgefüllten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) alle drei blauen Kugeln gezogen werden.
b) unter den Kugeln die beiden gelben Kugeln sind.

Lösung:

Baumdiagramm:



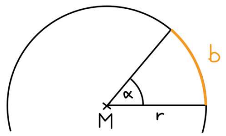
a) $P(bbb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ (1. Pfadregel)

b) $P(zwei\ gelbe\ Kugeln) = P(bgg) + P(gbb) =$
$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$
(1. und 2. Pfadregel)

M10 Bogenlänge und Bogenmaß | 5

Bogenlänge:

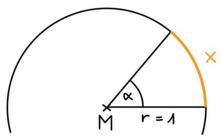
In einem Kreis mit Radius r gilt für einen Kreissektor mit **Mittelpunktswinkel α** und **Bogenlänge b** der folgende Zusammenhang: $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$



Bogenmaß:

Das **Bogenmaß x** eines Winkels α ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis (d.h. im Kreis mit dem Radius $r = 1$).

Es gilt: $\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$



M10 Bogenlänge und Bogenmaß | 5

Aufgabe:

1) Bestimmen Sie jeweils das andere Winkelmaß!

   a) $105°$ b) $\frac{7}{5}\pi$ c) $2{,}5°$ d) $\frac{\pi}{8}$

2) Ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 70° hat die Bogenlänge $0{,}75\pi$. Berechnen Sie den Radius!

Lösung:

1) a) $\frac{x}{2\pi} = \frac{105°}{360°} \Rightarrow x = \frac{105°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{7}{12}\pi$ b) $\frac{\frac{7}{5}\pi}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{7}{5}\pi}{2\pi} \cdot 360° = 252°$

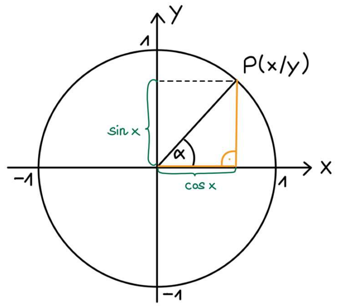
   c) $\frac{x}{2\pi} = \frac{2{,}5°}{360°} \Rightarrow x = \frac{2{,}5°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{1}{72}\pi$ d) $\frac{\frac{\pi}{8}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$

2) $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \Rightarrow r = \frac{b \cdot 360°}{\alpha \cdot 2\pi} = \frac{0{,}75\ \ \cdot 360°}{70° \cdot 2\pi} = 1\frac{13}{14}$

M10 Sinus und Kosinus am Einheitskreis | 6

Am Einheitskreis (d.h. am Kreis mit dem Radius $r = 1$) gilt für jeden Punkt $P(x/y)$:

$$x = \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = \sin\alpha$$



Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Je nach Größe des Winkels α ergeben sich folgende Werte:

α	$0°$	$0° < \alpha < 90°$	$90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270°$	$270° < \alpha < 360°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	> 0	1	> 0	0	< 0	-1	< 0	0
$\cos\alpha$	1	> 0	0	< 0	-1	< 0	0	> 0	1

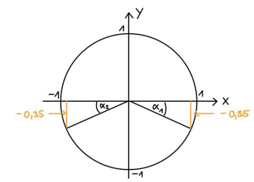
M10 Sinus und Kosinus am Einheitskreis | 6

Aufgabe: Runden Sie jeweils Ihr Ergebnis auf zwei Dezimalstellen!

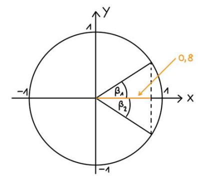
1) Ermitteln Sie alle Winkel im Intervall $[0; 360°]$, für die gilt: $\sin\alpha = -0{,}35$
2) Ermitteln Sie alle Winkel im Intervall $[0; 2\pi]$, für die gilt: $\cos\beta = 0{,}8$

Lösung:

1) $\sin\alpha < 0 \Rightarrow$ Winkel im III. oder im IV. Quadranten
   Taschenrechner (auf DEG eingestellt):
   $\alpha = sin^{-1}(-0{,}35) \approx -20{,}49°$
   Damit ergeben sich die beiden Winkel:
   $\alpha_1 = 360° - 20{,}49° = 339{,}51°$ und
   $\alpha_2 = 180° + 20{,}49° = 200{,}49°$



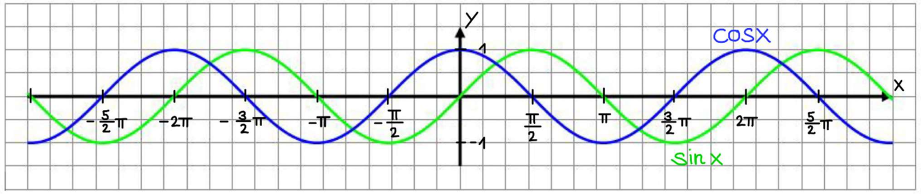
2) $\cos\beta > 0 \Rightarrow$ Winkel im I. oder im IV. Quadranten
   Taschenrechner (auf RAD eingestellt): $\beta = cos^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}64$
   Damit ergeben sich die beiden Winkel:
   $\beta_1 = 0{,}64$ und $\beta_2 = 2\pi - 0{,}64 = 5{,}64$



M10 Sinus- und Kosinusfunktion | 7

Sinusfunktion:
Die Funktion $f: x \longmapsto \sin x$ mit $x \in IR$ heißt **Sinusfunktion**. Ihre Wertemenge ist das Intervall $[-1; 1]$. Die Sinusfunktion ist periodisch mit der Periodenlänge 2π.

Kosinusfunktion:
Die Funktion $g: x \longmapsto \cos x$ mit $x \in IR$ heißt **Kosinusfunktion**. Ihre Wertemenge ist das Intervall $[-1; 1]$. Die Kosinusfunktion ist periodisch mit der Periodenlänge 2π.



M10 Sinus- und Kosinusfunktion | 7

Aufgabe:

Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$!

Lösung:

Die Funktion hat dort ihre Nullstellen, wo $\sin x = 0$ <u>oder</u> $\cos x = 0$ gilt

$sinx = 0$ in $[-2\pi; 2\pi]$, wenn $x_1 = -2\pi;\ x_2 = -\pi;\ x_3 = 0;\ x_4 = \pi;\ x_5 = 2\pi$

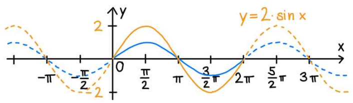
$cosx = 0$ in $[-2\pi; 2\pi]$, wenn $x_6 = -\frac{3}{2}\pi;\ x_7 = -\frac{1}{2}\pi;\ x_8 = \frac{1}{2}\pi;\ x_9 = \frac{3}{2}\pi$

M10 allgemeine Sinusfunktion – Teil 1 | 8

Die Graphen der allgemeinen Sinusfunktion $h(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$
(mit $a > 0; b > 0; c \in IR; d \in IR$) gehen aus dem Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ wie folgt hervor:

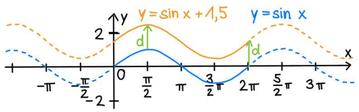
1) **Streckung ($a > 1$)/ Stauchung ($a < 1$)** von G_f in **y – Richtung** mit dem Faktor: $h(x) = a \cdot \sin x$

   z.B. $a = 2$



2) **Verschiebung** von G_f in **y – Richtung** um **d**: $h(x) = \sin x + d$

   z.B. $d = 1{,}5$



M10 allgemeine Sinusfunktion – Aufgaben zu Teil 1 und Teil 2 | 8

Aufgabe:

1) Geben Sie jeweils Amplitude, Periode und Wertemenge der gegebenen Funktion an:
   a) $f(x) = 3 \cdot \sin(0{,}5x + 2) - 3$ b) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(\pi x) + 2$

2) Beschreiben Sie, wie der Graph der gegebenen Funktion aus dem Graphen der Sinusfunktion hervorgehen!
   a) $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x) - 1$ b) $g(x) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 3{,}5$

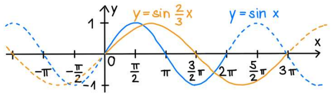
Lösung:

1) a) Amplitude: 3 Periode: $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$ Wertemenge $W = [-6; 0]$
   b) Amplitude: $\frac{1}{2}$ Periode: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ Wertemenge $W = [1{,}5; 2{,}5]$
2) a) Streckung in x – Richtung, Streckung in y – Richtung, Verschiebung um 1 nach unten
   b) Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ nach rechts, Stauchung in x – Richtung, Spiegelung an der x – Achse, Streckung in y – Richtung, Verschiebung um 3,5 nach oben.

M10 allgemeine Sinusfunktion – Teil 2 | 9

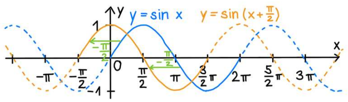
3) **Streckung ($b < 1$)/ Stauchung ($b > 1$)** von G_f in **x – Richtung**: $h(x) = \sin(bx)$

z.B. $b = \frac{2}{3}$



4) **Verschiebung** von G_f in **x – Richtung** um $-c$: $h(x) = \sin(x + c)$

z.B. $c = \frac{\pi}{2}$



Spezialfälle: **Spiegelung an der x – Achse:** $h(x) = -\sin x$

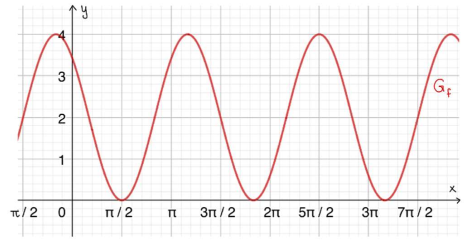
Spiegelung an der y – Achse: $h(x) = \sin(-x)$

Allgemein: Die Funktion $\boldsymbol{f(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d}$ hat die **Amplitude a** und die **Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.**

M10 allgemeine Sinusfunktion – Aufgaben zu Teil 1 und Teil 2 | 9

Aufgabe:

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie nachvollziehbar einen Funktionsterm von f !



Lösung:

Ablesen der Wertemenge: $W = [0; 4]$ => Die Amplitude beträgt 2 => $a = 2$

Drei Perioden haben die Länge 4π => $p = \frac{4\pi}{3}$ => $b = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2}$

Der Graph wurde um 2 nach oben verschoben => $d = 2$

Der Ursprung der Sinusfunktion $(0/0)$ wurde zum Punkt $(-\frac{\pi}{2}/2)$, d.h. der Graph wurde um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben => $c = \frac{\pi}{2}$

Insgesamt ergibt sich: $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

M10 Ganzrationale Funktionen – Teil 1 | 10

Definition:

Ein Term der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (mit $a_n \neq 0$) heißt **Polynom vom Grad n**. Die reellen Zahlen a_n nennt man **Koeffizienten**.
Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom ist, heißt **ganzrationale Funktion** oder **Polynomfunktion**.

Bemerkung:

1) Der höchste vorkommende Exponent bestimmt den **Grad** der ganzrationalen Funktion.
2) Der Summand mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt das **Verhalten der Funktionswerte im Unendlichen**:

z.B. $f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3} - 2x^2 + 5$ Graph verläuft von "links unten nach rechts oben".

$g(x) = \boldsymbol{-4x^5} + 3x^2 - 9x$ Graph verläuft von "links oben nach rechts unten".

$h(x) = 9x^2 - 5x^3 \boldsymbol{+ 0,5x^4} - 5$ Graph verläuft von "links oben nach rechts oben".

$k(x) = -3x^3 + 2 \boldsymbol{- 8x^6} + 2x$ Graph verläuft von "links unten nach rechts unten".

M10 Ganzrationale Funktionen – Teil 1 | 10

Aufgaben:

1) Lesen Sie jeweils den Grad der Funktion ab und beschreiben Sie den charakteristischen Verlauf des Graphen: $f(x) = 2x^3 + 4x^6 + x^2 - 3$ $g(x) = (-x^3 - 2)(x^2 + 2x)$

2) Begründen Sie die folgende Aussage: «Ein Polynom vom Grad 5 hat mindestens eine Nullstelle.»

Lösung:

1) $grad f = 6$ (höchster vorkommender Exponent 6),
G_f verläuft von links oben nach rechts oben (Koeffizient vor x^6 ist $+4$)
$g(x) = -x^5 - 2x^2 - 2x^4 - 4x$ => $grad g = 5$
G_g verläuft von links oben nach rechts oben (Koeffizient vor x^5 ist -1)

2) Ein Polynom vom Grad 5 verläuft entweder «von links unten nach rechts oben» oder «von links oben nach rechts unten». In beiden Fällen schneidet es irgendwann einmal die x – Achse, damit hat es sicherlich eine Nullstelle (oder sogar mehrere, maximal 5).

M10 Ganzrationale Funktionen – Teil 2 | 11

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Eine ganzrationale Funktion f mit dem Grad n hat immer maximal n Nullstellen.

Zur Bestimmung dieser Nullstellen muss man die Gleichung $f(x) = 0$ lösen.

Dabei unterscheidet man folgende Fälle:

1) $grad\ f = 1$:
Man löst die Gleichung, indem man mithilfe von Äquivalenzumformungen nach x auflöst.
2) $grad\ f = 2$:
Man kann entweder die Lösungsformel anwenden oder x ausklammern (wenn $a_0 = 0$ ist).
3) $grad\ f \geq 3$:
Derartige Gleichungen kann man nur lösen, wenn $a_0 = 0$ ist (durch Ausklammern), wenn der Funktionsterm bereits faktorisiert ist oder wenn es sich um eine biquadratische Gleichung handelt. (Dann wird die biquadratische Gleichung durch eine geeignete Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt.)

Vielfachheit von Nullstellen

Bei Nullstellen mit **gerader Vielfachheit** ergibt sich kein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte, G_f **berührt** dort die $x -$ Achse. Ist die **Vielfachheit** der Nullstelle **ungerade**, so liegt ein Vorzeichenwechsel vor, G_f **schneidet** dort die $x -$ Achse.

M10 Ganzrationale Funktionen – Teil 2 | 11

Aufgaben:

1) Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen und deren Vielfachheit!
$f(x) = (x-2)(x+3)(3x^2 - 12x + 12)$ $\qquad g(x) = 2x^4 - 34x^2 + 32$

2) Geben Sie eine ganzrationale Funktion möglichst geringen Grades an, deren Graph an der Stelle $x = -1$ die $x -$Achse berührt und deren Funktionswerte an den Stellen $x = 3$ und $x = 5$ einen Vorzeichenwechsel aufweisen. Außerdem soll der Funktionsgraph von links unten nach rechts oben verlaufen.

Lösung:

1) $f(x) = (x-2)(x+3) \cdot 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)(x+3)(x-2)^2$
=> einfache Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ und doppelte Nullstelle bei $x_{3/4} = 2$
$g(x) = 2(x^4 - 17x + 16)$
Substitution: $x^2 = z$ => $x^4 = z^2$ => Zu lösen ist: $z^2 - 17z + 16 = 0$
Mit der Lösungsformel ergibt sich: $z_{1/2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{17 \pm 25}{2} = \begin{cases} 21 \\ -4 \end{cases}$
Resubstitution: $x^2 = 21$ => $x_{1/2} = \pm\sqrt{21}$, $x^2 = -4$ nicht lösbar

2) Verlauf von links unten nach rechts oben => $gradf$ ungerade
$f(x) = (x+1)^2(x-3)(x-5) \cdot x$

M10 Symmetrie von Funktionsgraphen | 12

Symmetrie von Funktionsgraphen

Zur Untersuchung der Symmetrie des Graphens der Funktion f geht man wie folgt vor:

1. Man bestimmt $f(-x)$
2. Gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so ist G_f **achsensymmetrisch** zur $y -$ Achse.

   $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, so ist G_f **punktsymmetrisch** zum Ursprung.

M10 Symmetrie von Funktionsgraphen | 12

Aufgabe:

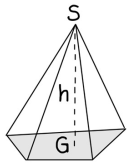
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie zum Koordinatensystem (KOSY):

$f(x) = 13x^5 - 7x + 5$
$g(x) = -0{,}5x^8 + 22x^{22} - 3$
$h(x) = x^2 sinx$
$k(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$

Lösung:

$f(-x) = 13(-x)^5 - 7(-x) + 5 = -13x^5 + 7x + 5 \neq -f(x)$ und $\neq f(x)$ => keine Symmetrie zum KOSY
$g(-x) = -0{,}5(-x)^8 + 22(-x)^{22} - 3 = -0{,}5x^8 + 22x^{22} - 3 = g(x)$ => Achsensymmetrie zur $y -$Achse
$h(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-sinx) = -x^2 sinx = -h(x)$ => Punktsymmetrie zum Ursprung
$k(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2 - 5} = \frac{-3x}{x^2 - 5} = -\frac{3x}{x^2 - 5} = -k(x)$ => Punktsymmetrie zum Ursprung

M10 Pyramide und Kugel | 13



Verbindet man die Eckpunkte eines Vielecks mit einem Punkt S außerhalb der Vielecksebene, so entsteht eine **Pyramide**. Ist die Grundfläche ein symmetrisches Vieleck und die Spitze S liegt senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche, so sind alle Seitenkanten gleich lang und es ergibt sich eine **gerade Pyramide**.

Das **Netz einer Pyramide** besteht aus der n-eckigen Grundfläche und n Dreiecken. Bei einer geraden Pyramide sind die Seitenflächendreiecke gleichschenklig.

Für eine Pyramide mit Grundfläche G, Mantelfläche M und Höhe h gilt zudem:

Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$ Oberflächeninhalt: $\boxed{O = G + M}$

Für eine **Kugel** mit dem Radius r gilt:

Volumen: $\boxed{V = \frac{4}{3} r^3 \pi}$ Oberflächeninhalt: $\boxed{O = 4r^2\pi}$

M10 Pyramide und Kugel | 13

Aufgaben:

1) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt einer $9dm$ hohen Pyramide, deren rechteckige Grundfläche die Seitenlängen $a = 4{,}5cm$ und $b = 723mm$ hat!
2) Ein näherungsweise runder Tennisball hat einen Außendurchmesser von $40mm$. Das Volumen des Hohlkörpers beträgt $32{,}04cm^3$. Berechnen Sie die Wandstärke d des Balls!

Lösung:

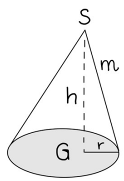
1) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5cm \cdot 72{,}3cm \cdot 90cm = 9760{,}5cm^3$

$O = G + M = a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot b \cdot h_b = a \cdot b + 2 \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$= 4{,}5cm \cdot 72{,}3cm + 2 \cdot 4{,}5cm \cdot \sqrt{(90cm)^2 + (36{,}15cm)^2} + 2 \cdot 72{,}3cm \cdot \sqrt{(90cm)^2 + (2{,}25cm)^2}$
$\approx 14216cm^2$

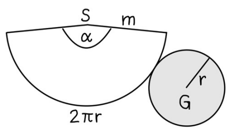
2) $V = \frac{4}{3} r_{groß}^3 \cdot \pi - \frac{4}{3} r_{klein}^3 \cdot \pi \Rightarrow \frac{3V}{4\pi} = r_{groß}^3 - r_{klein}^3 \Rightarrow r_{klein}^3 = r_{groß}^3 - \frac{3V}{4\pi} \Rightarrow r_{klein} = \sqrt[3]{r_{groß}^3 - \frac{3V}{4\pi}}$

$r_{klein} = \sqrt[3]{(2cm)^3 - \frac{3 \cdot 32{,}04cm^3}{4\pi}} \approx 0{,}71cm \Rightarrow d = r_{groß} - r_{klein} = 2cm - 0{,}71cm = 1{,}29cm$

M10 Kegel | 14



Verbindet man die Punkte einer Kreislinie mit einem Punkt S außerhalb der Kreisebene, so entsteht ein **Kegel**. Liegt die Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises, so sind alle Mantellinien gleich lang und es ergibt sich ein **gerader Kegel.**



Das **Netz eines Kegels** besteht aus einem Kreis mit Radius r als Grundfläche und einem Kreissektor als Mantelfläche. Für die Größe des Mittelpunktswinkels des Kreissektors gilt:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi m} = \frac{r}{m}$$

Für einen geraden Kegel mit Grundfläche G, dem Radius r, der Mantellinie m und der Höhe h gilt zudem:

Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi h}$

Inhalt der Mantelfläche: $\boxed{M = \pi r m}$

Oberflächeninhalt: $\boxed{O = G + M = \pi r^2 + \pi r m}$

M10 Kegel | 14

Aufgabe:

Ein Kreissektor mit dem Radius $5cm$ und dem Mittelpunktswinkel $80°$ wird zu einem Kegel zusammengebogen. Berechne dessen Volumen und den Mantelflächeninhalt!

Lösung:

Radius des Kegels: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{r}{m} \Rightarrow r = \frac{\alpha}{360°} \cdot m = \frac{80°}{360°} \cdot 5cm = \frac{10}{9} cm$

Höhe des Kegels: $m^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = \sqrt{m^2 - r^2} = \sqrt{(5cm)^2 - \left(\frac{10}{9} cm\right)^2} = \frac{5\sqrt{77}}{9} cm$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10}{9} cm\right)^2 \pi \cdot \frac{5\sqrt{77}}{9} cm \approx 6{,}3cm^3$

$M = \pi \cdot r \cdot m = \pi \cdot \frac{10}{9} cm \cdot 5cm = \frac{50}{9} \pi cm^2 \approx 17{,}5cm^2$